8. Correction des exercices

Exercice 3.4 Dans chacun des cas suivants, écrivons le trinôme $f(x)$ sous sa forme canonique.
(a)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2+6x \\ &= x^2+2\times 3\times x \\ &= \underbrace{x^2+2\times 3\times x+3^2}-3^2 \\ &= (x+3)^2-3^2 \\ &= (x+3)^2-9 \\ &= (x-(-3))^2+(-9) \end{aligned}$$

On reconnaît la forme canonique $a(x-\alpha)^2+\beta$, avec $a=1$, $\alpha=-3$ et $\beta=-9$.

(b)

$$\begin{aligned} f(x) &= -3x^2+6x-2 \\ &= -3\left(x^2-2x+\frac{2}{3}\right) \\ &= -3\left(x^2-2\times 1\times x+\frac{2}{3}\right) \\ &= -3\left(\underbrace{x^2-2\times 1\times x+1^2}-1^2+\frac{2}{3}\right) \\ &= -3\left((x-1)^2-1+\frac{2}{3}\right) \\ &= -3\left((x-1)^2-\frac{1}{3}\right) \\ &= -3(x-1)^2-3\times\left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= -3(x-1)^2+1 \end{aligned}$$

On reconnaît la forme canonique $a(x-\alpha)^2+\beta$, avec $a=-3$, $\alpha=1$ et $\beta=1$.

(c)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2+x-1 \\ &= x^2+2\times\frac{1}{2}\times x-1 \\ &= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-1 \\ &= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-1 \\ &= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4} \\ &= \left(x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2+\left(-\frac{5}{4}\right) \end{aligned}$$

On reconnaît la forme canonique $a(x-\alpha)^2+\beta$, avec $a=1$, $\alpha=-\frac{1}{2}$ et $\beta=-\frac{5}{4}$.

(d)

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2x(x-3)\\
&= 2x^2-6x\\
&= 2(x^2-3x)\\
&= 2\left(\underbrace{x^2-2\times\frac{3}{2}\times x+\left(\frac{3}{2}\right)^2}-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)\\
&= 2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-2\times\left(\frac{3}{2}\right)^2\\
&= 2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{2}
\end{aligned}$$

On reconnaît la forme canonique $a(x-\alpha)^2+\beta$, avec $a=2$, $\alpha=\frac{3}{2}$ et $\beta=-\frac{9}{2}$.

Exercice 3.5 Notons $\mathscr{V}_1(x)$ le volume du cube vert (le plus grand sur la figure ci-dessus), et $\mathscr{V}_2(x)$ le volume du cube bleu (le plus petit sur le figure ci-dessus).
On a : $\mathscr{V}_1(x)=x^3$ et $\mathscr{V}_2(x)=(10-x)^3$.
Notons $\mathscr{V}(x)$ la somme de ces deux volumes. Il vient :

$$\begin{aligned}
\mathscr{V}(x) &= \mathscr{V}_1(x)+\mathscr{V}_2(x)\\
&= x^3+(10-x)^3\\
&= x^3+(10-x)(10-x)^2\\
&= x^3+(10-x)(100-20x+x^2)\\
&= \cancel{x^3}+1000-200x+10x^2-100x+20x^2-\cancel{x^3}\\
&= 30x^2-300x+1000
\end{aligned}$$

On obtient un trinôme du second degré de la forme ax^2+bx+c, dont la forme canonique est :

$$\begin{aligned}
\mathscr{V}(x) &= 30x^2-300x+1000\\
&= 30\left(x^2-10x+\frac{100}{3}\right)\\
&= 30\left((x-5)^2-25+\frac{100}{3}\right)\\
&= 30\left((x-5)^2+\frac{25}{3}\right)\\
&= 30(x-5)^2+250
\end{aligned}$$

Ce trinôme est donc minimal pour $x=\alpha=5$, et son minimum est $\mathscr{V}_min=\beta=250$.
Ainsi, le somme des volumes des deux cubes est minimale pour $x=5$, et est dans ce cas égale à $250cm^3$.

Exercice 3.6 1 (a) forme développée :

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x^2-9)-2(x-3)(x+2)\\
&= x^2-9-2(x^2+2x-3x-6)\\
&= x^2-9-2x^2+2x+12\\
&= -x^2+2x+3
\end{aligned}$$

(b) forme canonique :

$$\begin{aligned}
f(x) &= -x^2+2x+3\\
&= -1(x^2-2x-3)\\
&= -1\left((x-1)^2-1-3\right)\\
&= -1(x-1)^2+4
\end{aligned}$$

2 (a) forme factorisée :

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x^2-9)-2(x-3)(x+2)\\
&= \underline{(x-3)}(x+3)-2\underline{(x-3)}(x+2)\\
&= \underline{(x-3)}\left[(x+3)-2(x+2)\right]\\
&= (x-3)(x+3-2x-4)\\
&= (x-3)(-x-1)\\
&= -(x-3)(x+1)
\end{aligned}$$

Nous verrons plus tard dans ce chapitre une autre méthode pour obtenir la forme factorisée.

(b) On utilise la forme factorisée, qui fournit une équation-produit :
$f(x)=0 \Leftrightarrow (x-3=0$ ou $x+1=0) \Leftrightarrow (x=3$ ou $x=-1)$
$S=\{-1;3\}$

3 La courbe coupe l'axe des abscisses en -1 et 3, qui sont bien les solutions de l'équation $f(x)=0$. De plus $f(1)=4$ (se calcule plus facilement avec la forme canonique) et l'allure de la courbe correspond au cas $a<0$.On voit ici que chaque forme (développée, canonique, factorisée) a un usage différent.

<u>Exercice</u> 3.7 a)

$$\begin{aligned}
x^2-9+4(x+3) &= 0\\
(x+3)(x-3)+4(x+3) &= 0\\
(x+3)\left[(x-3)+4\right] &= 0\\
(x+3)(x+1) &= 0
\end{aligned}$$

$S=\{-3;-1\}$
c)

$$\begin{aligned}
(7-2x)^2+1 &= 0\\
(7-2x)^2 &= -1
\end{aligned}$$

$S=\emptyset$, car le carré d'un nombre réel ne peut pas être négatif !
Pour ceux d'entre vous qui auront traité les autres questions de l'exercice 46, les solutions sont :
b) $S=\left\{\frac{1}{2};1\right\}$
d) $S=\left\{-\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right\}$
e) $S=13$

<u>Exercice</u> 3.8 a) $-3x^2+7x+1$ est un trinôme de la forme ax^2+bx+c, avec $a=-3$, $b=7$ et $c=1$.
On calcule le discriminant $\Delta=b^2-4ac=7^2-4\times(-3)\times 1=49+12=61$.
Comme $\Delta>0$, le trinôme possède deux racines distinctes.
$S=\left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}=\left\{\frac{-7-\sqrt{61}}{-6};\frac{-7+\sqrt{61}}{-6}\right\}=\left\{\frac{7+\sqrt{61}}{6};\frac{7-\sqrt{61}}{6}\right\}$.
b) $3x^2+\sqrt{12}x+1$ est un trinôme de la forme ax^2+bx+c, avec $a=3$, $b=\sqrt{12}$ et $c=1$.
On calcule le discriminant $\Delta=b^2-4ac=\left(\sqrt{12}\right)^2-4\times 3\times 1=12-12=0$.
Comme $\Delta=0$, le trinôme possède une seule racine, dite "racine double".
$S=\left\{\frac{-b}{2a}\right\}=\left\{\frac{-\sqrt{12}}{6}\right\}=\left\{-\frac{2\sqrt{3}}{6}\right\}=\left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}=\left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.
Pensez à "simplifier" les racines carrées ! ! !

<u>Exercice</u> 3.9 $x(x+4)+8=0 \Leftrightarrow x^2+4x+8=0$, on a un trinôme du second degré.
Calculons le discriminant : $\Delta=b^2-4ac=4^2-4\times 1\times 8=16-32=-16$
On a $\Delta<0$, donc $S=\emptyset$.

<u>Exercice</u> 3.10 $2(1-3u)=u^2-3(2u+1) \Leftrightarrow 2-6u=u^2-6u-3 \Leftrightarrow u^2=5$, on a un trinôme du second degré, mais...
Inutile de calculer le discriminant, il s'agit d'une équation de la forme $x^2=a$, que vous avez étudiée dès la troisième. On a donc $S=\{-\sqrt{5};\sqrt{5}\}$.
Solution de la question b) pour ceux qui l'ont traitée : $\Delta=16^2$, d'où $S=\{\frac{4\sqrt{7}-16}{6};\frac{4\sqrt{7}+16}{6}\}=\{\frac{2\sqrt{7}-8}{3};\frac{2\sqrt{7}+8}{3}\}$

Exercice 3.11 $B(x) = -3x^2 + 4x + 4$, on a un trinôme du second degré, que nous allons factoriser en trouvant ses racines grâce au calcul du discriminant.
$\Delta = 4^2 - 4 \times (-3) \times 4 = 16 + 48 = 64$
On a $\Delta > 0$, il y a dons deux racines distinctes :
$x_1 = \frac{-4-\sqrt{64}}{-6} = \frac{-4-8}{-6} = \frac{12}{6} = 2$
$x_2 = \frac{-4+\sqrt{64}}{-6} = \frac{-4+8}{-6} = \frac{+4}{6} = -\frac{2}{3}$
Donc la forme factorisée du trinôme est :
$B(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = -3(x-2)(x - \frac{-2}{3}) = -3(x-2)(x + \frac{2}{3}) = (2-x)(3x+2)$
Solution des questions a)et c) pour ceux qui les ont traitées :
a) $A(x) = 12(x + \frac{2}{3})(x - \frac{1}{4}) = (3x+2)(4x-1)$
c) $C(x) = (2x-5)^2$

Exercice 3.12 1) La courbe de f est la courbe bleue, et la courbe de g la rouge.
2a) C_f coupe l'axe des abscisses en 0 et en 4, donc ce sont ses racines.
Ainsi, la forme factorisée de $f(x)$ est du type $ax(x-4)$.
2b) $f(2) = -4$, donc $a \times 2(2-4) = -4$, donc $a = \frac{-4}{2(2-4)} = \frac{-4}{2\times(-2)} = 1$.
3a) C_g coupe (Ox) en 1 seulement, donc 1 est racine double, et la forme factorisée de $g(x)$ est du type : $a(x-1)^2$ (attention, ce n'est pas le même "a" qu'à la question précédente).
3b) On a $g(0) = -2$, donc $a(-1)^2 = -2$. Par suite $a = -2$

Exercice 3.13 Attention, les résolutions graphiques ne donnent que des solutions approchées ! ! !

a) $f(x) \geq 0$	b) $f(x) > 0$	c) $f(x) \leq 0$	d) $f(x) > 0$
$S = \emptyset$	$S =]-1;3[$	$S = [0;3]$	$S = \mathbb{R} - \{2\}$

Exercice 3.14 "Proverbe" à retenir : Qui dit **signe** dit **factorisation** ! ! ! !

$$\begin{aligned} A(x) &= (x^2-4) - 3(x+2)(x-1) \\ &= (x+2)(x-2) - 3(x+2)(x-1) \\ &= (x+2)[(x-2) - 3(x-1)] \\ &= (x+2)(x-2-3x+3) \\ &= (x+2)(-2x+1) \end{aligned}$$

Pour étudier le signe de ce produit, on construit un tableau dont chaque ligne représente l'un des facteurs. On pourra ainsi y inscrire le signe de chacun des facteurs, et en déduire le signe de l'expression globale.

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$(x+2)$		-	0	+		+	
$(-2x+1)$		+		+	0	-	
$A(x)$		-	0	+	0	-	

Solution des questions b)et c) pour ceux qui les ont traitées :
b)$B(x) = (x-1)(x-9)$

x	$-\infty$		1		9		$+\infty$
$B(x)$		+	0	-	0	+	

c)$C(x) = (8x-5)(-4x+13)$

x	$-\infty$		$\frac{5}{8}$		$\frac{13}{4}$		$+\infty$
$C(x)$		-	0	+	0	-	

Exercice 3.15 Il s'agit de trinômes du second degré. On peut les factoriser comme à l'exercice précédent, ou bien, comme dans le tableau récapitulatif du cours, arguer que "le trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines (pour le cas où il y a deux racines distinctes).
a) On a un trinôme du second degré.$\Delta = 68$; $x_1 = 6 - 2\sqrt{17}$; $x_2 = 6 + 2\sqrt{17}$, avec $a = -\frac{1}{2}$
Donc $f(x)$ est "du signe de a à l'extérieur des racines", c'est-à-dire :

x	$-\infty$		$6-2\sqrt{17}$		$6+2\sqrt{17}$		$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	0	-	

b) On a un trinôme du second degré.$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$; donc pour tout x, $g(x) > 0$.
Solution de la question c) pour ceux qui l'ont traitée :
$\Delta = -2 < 0$, donc pour tout x , $h(x) < 0$.

Exercice 3.16 Cette inéquation est en réalité une étude de signe. Or il s'agit d'un trinôme du second degré.

Calculons-en le discriminant : $\Delta = \frac{225}{4} > 0.\sqrt{\Delta} = \frac{15}{2}$. Ce trinôme a donc deux racines distinctes $x_1 = -2$ et $x_2 = \frac{1}{2}$. Le trinôme étant "du signe de a à l'extérieur des racines", il vient
$S =]-\infty; -2] \cup [\frac{1}{2}; +\infty[$.

Solution des questions a), c) et d) pour ceux qui les ont traitées :
a) $S = \{-\frac{5}{3}\}$
c) $\Delta = 64^2$, $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{7}{8}$, d'où $S =]-\infty; \frac{1}{8}[\cup]\frac{7}{8}; +\infty[$
d) $S =]-\infty; -\frac{3}{2}[\cup]-\frac{3}{2}; +\infty[$

Exercice 3.17 Dire que le poids de l'astronaute est inférieur à 25N équivaut à :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ et \\ 60 \times 9,8 \times \left(\frac{6400}{6400+x}\right)^2 \leq 25 \end{cases}$$

La seconde inéquation est équivalente à :
$588 \times 6400^2 \leq 25 \times (6400 + x)^2$,
c'est-à-dire : $x^2 + 12800x - 922419200 \geq 0$.
Il s'agit donc d'étudier le signe d'un trinôme du second degré, et nous pouvons appliquer les méthodes vues précédemment.
Puisque $x \geq 0$, le poids de l'astronaute sera inférieur à 25N à partir de 24 639 km d'altitude, à 1km près (l'autre racine du trinôme est -37438¡0).
Remarques : l'altitude de l'ISS (station spatiale internationale) est d'environ 330 km, et l'altitude de l'orbite géostationnaire est 36 000 km.